“皖南八校”2019届高三第一次联考·数学(理科)
参考答案、解析及评分细则

1. D　$A=\{x\mid x>1$ 或 $x<0\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,x>\dfrac{1}{2}\right\}$，$A\cap B=\{x\mid x>1\}$.

2. C　$\mathrm{i}^{2019}=-\mathrm{i}$，即 $-\mathrm{i}=\dfrac{\mathrm{i}-k}{k\mathrm{i}-1}$，$\therefore k+\mathrm{i}=\mathrm{i}-k$，$\therefore k=0$.

3. C

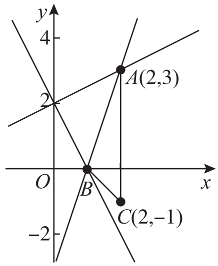
4. A　$-1<2^x-3<1$，$2<2^x<4$，$1<x<2$.

5. B　如图所示：$\overrightarrow{BF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{BE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$；

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}\right)=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

6. D　$y=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$的单调增区间为$\left[2k\pi-\dfrac{3\pi}{4},2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，$0<a\leqslant\dfrac{\pi}{4}$.

7. A　$y=k(x-2)-1$ 恒过 $C(2,-1)$，如图 A 正确.



8. D　设$\{a_n\}$的公差为 d，则 $a_1+d=5$，$a_1+7d=11$，$\therefore a_1=4$，$d=1$，$\therefore a_n=n+3$，又 $a_n=b_{n+1}-b_n$，$b_1=1$，

$\therefore n>1$ 时，$b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})=1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=1+\dfrac{(n-1)(n+6)}{2}$，

$\therefore b_{11}=86$.

9. B　函数 $y=\log_a(x+4)-1(a>0,a\neq1)$的图象恒过 $A(-3,-1)$，由点 A 在直线$\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=-1$ 上可得，

$\dfrac{-3}{m}+\dfrac{-1}{n}=-1$，即$\dfrac{3}{m}+\dfrac{1}{n}=1$，故 $3m+n=(3m+n)\times\left(\dfrac{3}{m}+\dfrac{1}{n}\right)=10+3\left(\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n}\right)$，

因为 $m>0$，$n>0$，所以$\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n}\geqslant2\sqrt{\dfrac{n}{m}\times\dfrac{m}{n}}=2$(当且仅当$\dfrac{n}{m}=\dfrac{m}{n}$，即 $m=n$ 时取等号)，

故 $3m+n=10+3\left(\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n}\right)\geqslant10+3\times2=16$.

10. D　$A=\sqrt{2}$，$\dfrac{T}{4}=\dfrac{\pi}{4}$，$\therefore T=\pi$，$\therefore\omega=2$，$\therefore f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2\times\dfrac{7\pi}{12}+\varphi\right)=-\sqrt{2}$，

$\therefore\dfrac{7\pi}{6}+\varphi=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，$\therefore\varphi=2k\pi-\dfrac{5\pi}{3}$，$\therefore\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\therefore g(x)=f\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2$

$=\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2$.

11. C　由题意知，$f(x)-\dfrac{1}{x}$为常数，令 $f(x)-\dfrac{1}{x}=k$(k 为常数)，

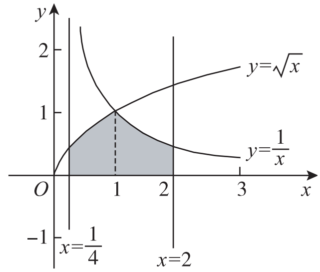
则 $f(x)=\dfrac{1}{x}+k$，由 $f\left(f(x)-\dfrac{1}{x}\right)=2$，得 $f(k)=2$.

又 $f(k)=\dfrac{1}{k}+k=2$，$\therefore k=1$，即 $f(x)=\dfrac{1}{x}+1$. $\therefore f\left(\dfrac{1}{6}\right)=7$.

12. A　设 $G(x)=f(x)-x^2$，则 $G'(x)=f'(x)-2x$，$x\in(0,+\infty)$时，$G'(x)=f'(x)-2x>0$，
$G(-x)=f(-x)-(-x)^2=f(x)-x^2=G(x)$
$\therefore G(x)$为偶函数，$\therefore G(x)$在$[0,+\infty)$上是增函数，$x\in(-\infty,0)$时单调递减，
$f(a-2)-f(a)\geqslant4-4a$，$\therefore f(a-2)-4+4a-a^2\geqslant f(a)-a^2$
$\therefore f(2-a)-(a-2)^2\geqslant f(a)-a^2$，即 $G(a-2)\geqslant G(a)$，$\therefore|a-2|\geqslant|a|$，$\therefore$ $a\leqslant1$

13. $-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$　因为 α 是第二象限角，且 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，所以 $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，故 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

14. $\frac{7}{12}+\ln 2$　由题意,围成封闭图形如图中阴影部分,



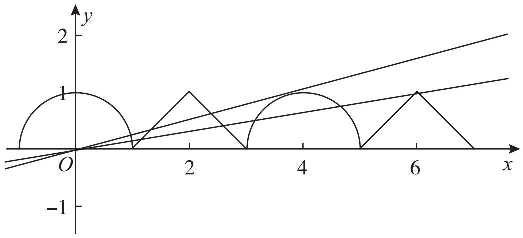
$S=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}+\ln x\Big|_{1}^{2}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{8}\right)+\ln 2=\frac{7}{12}+\ln 2.$

15. 5　$f(-x)=\frac{3^{-x+1}+2}{3^{-x}+1}+2\sin(-x)=\frac{3+2\times 3^{x}}{1+3^{x}}-2\sin x$, $f(-x)+f(x)=5$, $\therefore f(-x)-\frac{5}{2}+f(x)-\frac{5}{2}=0$,

$\therefore y=f(x)-\frac{5}{2}$是奇函数,$\therefore f(x)_{\max}-\frac{5}{2}+f(x)_{\min}-\frac{5}{2}=0$,即 $M-\frac{5}{2}+N-\frac{5}{2}=0$, $M+N=5$.

16. $(\sqrt{15},6)$　$mf(x)=x$ 有 5 个解,利用函数与方程思想可转化为 $y=f(x)$与 $y=\frac{1}{m}x$ 的交点有 5 个的问题.

即直线 $y=\frac{1}{m}x$ 过点$(6,1)$和直线 $y=\frac{1}{m}x$ 与半圆$(x-4)^{2}+y^{2}=1$ 相切,可得 $m\in(\sqrt{15},6)$.



17. 解:$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^{2}=5\sqrt{3}\cos x\cdot\sin x+2\cos x\cdot\cos x+\sin^{2}x+4\cos^{2}x=5\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^{2}x+6\cos^{2}x=$

$\frac{5\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1-\cos 2x}{2}+3(1+\cos 2x)=\frac{5\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{5}{2}\cos 2x+\frac{7}{2}=5\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{7}{2}$. ………… 4 分

(1) $f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ 得 $k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{2\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore f(x)$的单调减区间为$\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$. ………………………………………………………………… 7 分

(2) $\because\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\therefore\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$,

$\therefore -\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$,

$\therefore 1\leqslant f(x)\leqslant\frac{17}{2}$,即 $f(x)$的值域为$\left[1,\frac{17}{2}\right]$. …………………………………………………………………… 10 分

18. 解:(1) $\because na_{n+1}=(n+2)S_{n}$, $\therefore n(S_{n+1}-S_{n})=(n+2)S_{n}$, ………………………………………………… 3 分

$\therefore nS_{n+1}=2(n+1)S_{n}$, $\therefore\frac{S_{n+1}}{n+1}=2\left(\frac{S_{n}}{n}\right)$,又 $a_{1}=1$, $\therefore\frac{S_{n}}{n}=\frac{a_{1}}{1}=1$,

$\therefore\left\{\frac{S_{n}}{n}\right\}$是以 1 为首项 2 为公比的等比数列. ……………………………………………………………… 6 分

(2) $\because\left\{\frac{S_{n}}{n}\right\}$是以 1 为首项 2 为公比的等比数列,

$\therefore\frac{S_{n}}{n}=2^{n-1}$,即 $S_{n}=n\cdot 2^{n-1}$, ……………………………………………………………………… 8 分

当 $n\geqslant 2$ 时, $a_{n}=S_{n}-S_{n-1}=n\cdot 2^{n-1}-(n-1)\cdot 2^{n-2}=2^{n-2}(2n-n+1)=(n+1)2^{n-2}$, ………………… 10 分

$a_{1}=1$ 也符合,所以 $a_{n}=(n+1)2^{n-2}$. ……………………………………………………………………… 12 分

19. 解:(1) $\because\frac{(a+b+c)(b-a-c)}{ac}+2=\frac{\cos(A+C)}{\sin A\cos A}$

$\therefore \frac{b^2-(a+c)^2}{ac}+2=\frac{b^2-a^2-c^2}{ac}=\frac{\cos(A+C)}{\sin A\cos A}=\frac{-\cos B}{\frac{1}{2}\sin 2A}$, ……………………………………………… 4 分

$\therefore \frac{b^2-a^2-c^2}{ac}=\frac{-\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{\frac{1}{2}\sin 2A}$,由$\triangle ABC$为斜三角形,$\therefore \sin 2A=1$,$\therefore A=\frac{\pi}{4}$. ……………………………… 6 分

(2)$\because \frac{\sin C}{\cos B}>\sqrt{2}$,$\therefore \cos B>0$, ………………………………………………………………………… 7 分

由(1)知 $B+C=\frac{3\pi}{4}$,$\therefore \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}-B\right)}{\cos B}>\sqrt{2}$,即$\frac{\sin\frac{3\pi}{4}\cos B-\cos\frac{3\pi}{4}\sin B}{\cos B}>\sqrt{2}$,……………………… 9 分

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\tan B>\sqrt{2}$,$\therefore$ $\tan B>1$,$\therefore \frac{\pi}{4}<B<\frac{\pi}{2}$. ………………………………………………… 12 分

20. 解:(1)$\neg p$:$\exists x\in \mathbf{R}$,$\sqrt{(a+1)x^2-(a+1)x+1}$无意义, ……………………………………………… 2 分

p为真命题时,$a+1\geqslant 0$.

当 $a+1=0$,$a=-1$ 时,$\sqrt{(a+1)x^2-(a+1)x+1}=1$ 有意义. ……………………………………… 3 分

当 $a+1>0$,$(a+1)^2-4(a+1)\leqslant 0$,$-1<a\leqslant 3$ 时,有意义. ………………………………………… 4 分

$\therefore p$为真命题时,$a\in[-1,3]$. ……………………………………………………………………………… 5 分

(2)$\neg p$为真命题时,$a\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$, ………………………………………………………… 6 分

q为真命题时,$y'=2ax+3(\cos x-x\sin x-\cos x)=x(2a-3\sin x)$,

由函数在$(0,+\infty)$上是单调函数,

$\therefore 2a\geqslant 3\sin x$ 或 $2a\leqslant 3\sin x$ 在 $x>0$ 时成立,$\therefore a\geqslant\frac{3}{2}$或 $a\leqslant-\frac{3}{2}$, ………………………………… 8 分

$\because(\neg p)\vee q$为真命题,$(\neg p)\wedge q$为假命题,

$\therefore \neg p$与q一真一假. ………………………………………………………………………………………… 9 分

当$\neg p$为真命题,q为假命题时,$-\frac{3}{2}<a<-1$. ……………………………………………………………… 10 分

当$\neg p$为假命题,q为真命题时,$\frac{3}{2}\leqslant a\leqslant 3$. ……………………………………………………………… 11 分

$\therefore a$的取值范围是$\left(-\frac{3}{2},-1\right)\cup\left[\frac{3}{2},3\right]$. ……………………………………………………………… 12 分

21. 解:(1)$\because f(x)=\frac{x+1}{e^x}$,$\therefore f'(x)=\frac{-x}{e^x}$. ……………………………………………………………… 1 分

令 $f'(x)=0$,解得 $x=0$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值 1	↘

$\therefore f(x)$在$(-\infty,0]$内是增函数,在$[0,+\infty)$内是减函数, ……………………………………………… 3 分

$\therefore x\in\mathbf{R}$ 时,$f(x)\leqslant f(0)=1$. ……………………………………………………………………………… 4 分

(2)$\because g(x)=2x+1-\frac{a}{e^x}$,$\therefore g'(x)=2+\frac{a}{e^x}$, ……………………………………………………………… 5 分

若 $a\geqslant 0$,则 $g'(x)>0$ 恒成立,$\therefore g(x)$在$\mathbf{R}$内递增,$g(x)$不可能有 2 个零点; …………………………… 6 分

若 $a<0$,$g'(x)=0$ 得 $x=\ln\left(-\frac{a}{2}\right)$

令 $g'(x)>0$ 得 $x>\ln\left(-\frac{a}{2}\right)$;令 $g'(x)<0$ 得 $x<\ln\left(-\frac{a}{2}\right)$,

$\therefore g(x)$在$\left(-\infty,\ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right)$内递减,在$\left(\ln\left(-\frac{a}{2}\right),+\infty\right)$内递增,

由题意,则 $f\left(\ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right)<0$,$\therefore 2\ln\left(-\frac{a}{2}\right)+1+2<0$,$\therefore a>-2e^{-\frac{3}{2}}$,$\therefore -2e^{-\frac{3}{2}}<a<0$. ………… 8 分

下证:$a\in(-2e^{-\frac{3}{2}},0)$时,$g(x)$有 2 个零点,

由 $g(0)=1-a>0$ 及单调性知 $g(x)$在$\left(\ln\left(-\frac{a}{2}\right),0\right)$内有 1 个零点. ……………………………… 9 分

$\because a\in(-2e^{-\frac{3}{2}},0)$时,$0<-\frac{a}{4}<-\frac{a}{2}<e^{-\frac{3}{2}}$,

$\therefore \ln\left(-\frac{a}{4}\right)<\ln\left(-\frac{a}{2}\right)<-\frac{3}{2}$，取 $x_1=-n+\ln\left(-\frac{a}{4}\right)(n>0)$，则 $x_1<\ln\left(-\frac{a}{2}\right)$，

$g(x_1)=-2n+2\ln\left(-\frac{a}{4}\right)+4e^n+1=2(e^n-n)+2\left[e^n+\ln\left(-\frac{a}{4}\right)\right]+1$，

由(1)知 $\frac{n+1}{e^n}\leqslant 1$，$\therefore e^n\geqslant n+1>n$，取 $n=1+\ln\left[-\ln\left(-\frac{a}{4}\right)\right]$，

则 $e^n>e^{\ln\left[-\ln\left(-\frac{a}{4}\right)\right]}=-\ln\left(-\frac{a}{4}\right)$，$\therefore e^n+\ln\left(-\frac{a}{4}\right)>0$，$\therefore g(x_1)>0$，

由 $g(x)$ 的单调性知 $g(x)$ 在 $\left(x_1,\ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right)$ 内有 1 个零点，………………………………………… 11 分

$\therefore g(x)$ 有 2 个零点时，$a\in(-2e^{-\frac{3}{2}},0)$. ………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1) $f'(x)=2x+b-\frac{a}{x}$，$f(1)=1+b$，$f'(1)=2+b-a$， ………………………………………… 1 分

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-1-b=(2+b-a)(x-1)$，即 $y=(2+b-a)x+a-1$，…… 2 分

$\therefore$ 切线在 y 轴上的截距为 2，$\therefore a-1=2$，$\therefore a=3$，

又切线在 x 轴的截距为 -2，$\therefore \frac{1-a}{2+b-a}=-2$，$\therefore b=2$. ……………………………………………… 6 分

(2) 解法一：令 $g(b)=xb+x^2-a\ln x$，$b\in[-2,-1]$，则 $g(b)$ 为关于 b 的一次函数且为增函数，

根据题意，对任意 $b\in[-2,-1]$，都存在 $x\in(1,e)$，使得 $g(b)<0$ 成立，则 $g(b)_{\max}=g(-1)=x^2-x-a\ln x<0$ 在 $(1,e)$ 上有解， ……………………………………………………………………………………… 8 分

令 $h(x)=x^2-x-a\ln x$，只需存在 $x_0\in(1,e)$ 使得 $h(x_0)<0$ 即可，

由于 $h'(x)=2x-1-\frac{a}{x}=\frac{2x^2-x-a}{x}$，

令 $\varphi(x)=2x^2-x-a$，$x\in(1,e)$，$\varphi'(x)=4x-1>0$，

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，$\varphi(x)>\varphi(1)=1-a$，……………………………………………… 10 分

①当 $1-a\geqslant 0$，即 $a\leqslant 1$ 时，$\varphi(x)>0$，即 $h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，

$\therefore h(x)>h(1)=0$，不符合题意.

②当 $1-a<0$，即 $a>1$ 时，$\varphi(1)=1-a<0$，$\varphi(e)=2e^2-e-a$，

若 $a\geqslant 2e^2-e>1$，则 $\varphi(e)<0$，所以在 $(1,e)$ 上 $\varphi(x)<0$ 恒成立，即 $h'(x)<0$ 恒成立，

$\therefore h(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递减，

$\therefore$ 存在 $x_0\in(1,e)$，使得 $h(x_0)<h(1)=0$，符合题意.

若 $2e^2-e>a>1$，则 $\varphi(e)>0$，

$\therefore$ 在 $(1,e)$ 上一定存在实数 m，使得 $\varphi(m)=0$，

$\therefore$ 在 $(1,m)$ 上 $\varphi(x)<0$ 恒成立，即 $h'(x)<0$ 恒成立，$h(x)$ 在 $(1,m)$ 上单调递减，

$\therefore$ 存在 $x_0\in(1,m)$，使得 $h(x_0)<h(1)=0$，符合题意.

综上所述，当 $a\in(1,+\infty)$ 时，对任意 $b\in[-2,-1]$，都存在 $x\in(1,e)$，使得 $g(x)<0$ 成立. ………… 12 分

解法二：$f'(x)=2x-\frac{a}{x}+b=\frac{2x^2+bx-a}{x}$，$x\in(1,e)$，

设 $G(x)=2x^2+bx-a$，$x\in(1,e)$，

$\because b\in[-2,-1]$，$\therefore G(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，且 $G(1)=2+b-a$，

①当 $G(1)\geqslant 0$，即 $a\leqslant 2+b$ 时，

$\because b\in[-2,-1]$，$\therefore a\leqslant 0$. 此时 $G(x)>G(1)\geqslant 0$，

$\therefore f'(x)>0$ 在 $(1,e)$ 上恒成立，即 $f(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增.

若存在 $x\in(1,e)$，使得 $f(x)$ 成立，则 $f(1)=1+b<0$，即 $b<-1$ 恒成立.

$\because b\in[-2,-1]$，则 $b=-1$ 时不成立，$\therefore a\leqslant 0$ 不成立.

②当 $G(1)<0$，即 $a>2+b$ 时，$\because b\in[-2,-1]$，$\therefore a>1$. 此时，

(ⅰ)当 $G(e)<0$ 时，$G(x)<0$ 在 $(1,e)$ 上恒成立，则 $f(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递减.

$\because f(1)\leqslant 0$，$\therefore$ 存在 $x\in(1,e)$，使得 $f(x)<0$ 成立.

(ⅱ)当 $G(e)\geqslant 0$ 时，则存在 $x_0\in(1,e)$，使得 $G(x_0)=0$，

$\because G(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x\in(1,x_0)$ 时，$G(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减.

$\because f(1)\leqslant 0$，故在 $(1,x_0)$ 内存在 $x\in(1,e)$，使得 $f(x)<0$ 成立.

综上，满足条件的 a 的取值范围为 $\{a|a>1\}$. ………………………………………………………………… 12 分